APPUNTI di LOGICA
(a cura del prof. Francesco Auletta)

PROPOSIZIONI LOGICHE

Le proposizioni logiche sono quelle proposizioni per le quali si può stabilire il valore di verità, cioè se sono vere o sono false, e per le quali sussistono i seguenti principi fondamentali:
-principio di non contraddizione**,** una proposizione logica non può essere vera e falsa contemporaneamente;
-principio del terzo escluso**,** una proposizione logica può assumere solo il valore di vero o falso e non esiste un terzo valore.

Non sono proposizioni logiche, in quanto per esse non si può esprimere un giudizio di verità o di falsità, le frasi del tipo
-frasi interrogative, come "hai *mangiato?*",
-frasi esclamative come "*che bel dipinto!*"
-opinioni, come "*questo film è molto noioso*"
-previsione, come "*Claudio sarà promosso*"
-esortazione, come "*scrivi a tuo fratello*"
-prive di senso: "*il seno di un angolo vince a poker*"
-indefinite: "*leggere il giornale*"

Una proposizione logica può essere

-***semplice* (*atomica, elementare*)**, «*Dario legge*», «*Mario gioca*»
***-composta* (*molecolare*),** «*Dario legge e Mario gioca*»

Le proposizioni semplici le indicheremo con le lettere *p*, *q*, *r*...
Le proposizioni composte, definite anche funzioni logiche, sono ottenute collegando tra loro due o più proposizioni semplici mediante particolari operatori logici, detti *connettivi* o *funtori*.

CONNETTIVI LOGICI   I connettivi logici principali sono:

a) *la negazione*;

b) *la congiunzione* o ***prodotto logico;***

c) *la disgiunzione inclusiva* o ***somma logica;***

d) la disgiunzione esclusiva;

e) il condizionale o implicazione materiale;

f) il bicondizionale o coimplicazione materiale;

	CONNETTIVI	SIMBOLI	FUNZIONI LOGICHE
a)	negazione	non, not	$\overline{p}, \tilde{p}, \sim p, \neg p$
b)	congiunzione o prodotto logico	et, and	$p \wedge q, p \cdot q$
c)	disgiunzione logica inclusiva o somma logica	o, or, vel	$p \vee q$
d)	disgiunzione logica esclusiva	aut	$\sim(p \leftrightarrow q), \veebar$
e)	condizionale o implicazione materiale	se…allora	$p \rightarrow q$
f)	bicondizionale o equivalenza materiale	se e solo se	$p \leftrightarrow q$

a) la negazione di una proposizione è un connettivo unario (opera su una sola proposizione) che a ogni proposizione *p*, associa una nuova proposizione, detta negazione di *p*, la quale risulta vera se *p* è falsa, falsa se *p* è vera; in altri termini, con la negazione si scambiano i valori di verità di una proposizione.

La negazione di *p* viene indicata con *non p* oppure con il simbolo $\neg p$, oppure ~p , oppure $\overline{p}$.
La negazione della negazione di *p* è una proposizione che è vera quando $\overline{p}$ è falsa ed è falsa quando $\overline{p}$ è vera. Essa si indica con il simbolo $\overline{\overline{p}}$.
Es. *p*: «*Leopardi è un poeta*» , $\overline{p}$: «*Leopardi non è un poeta*» ,
$\overline{\overline{p}}$: «*non è che Leopardi non è un poeta*» = «*Leopardi è un poeta*»

b) ***la congiunzione logica*** o ***prodotto logico*** *di* due proposizioni è il connettivo che ad ogni coppia di proposizioni, *p, q,* associa la proposizione composta "*p* e *q*", vera se *p* e *q* sono entrambe vere, falsa negli altri casi. Si ottiene impiegando la particella « *e* » o il simbolo $\wedge$

Tabella di verità della congiunzione o prodotto logico di *p* e *q*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) la ***disgiunzione logica inclusiva*** o ***somma logica*** è il connettivo che ad ogni coppia di proposizioni *p*, *q*, associa la proposizione composta "*p* o *q*" (anche con "*p* oppure *q*", *oppure* "*p vel q*"), vera se almeno una delle due proposizioni è vera, falsa se *p* e *q* sono entrambe false. L'operazione viene indicata simbolicamente $p \vee q$.

Tabella di verità della disgiunzione logica inclusiva o **somma logica**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

d) ***la disgiunzione « o » può avere anche significato esclusivo*** ; in tal caso si usa la particella latina « *aut* » e il simbolo $\veebar$, oppure la doppia *« o »*
Pertanto, la frase «*Claudio legge aut cammina*» («*Claudio o legge o cammina*») è vera se è vera solo una delle due tra *legge* e *cammina*, è falsa in ogni altro caso.

e) ***il condizionale o implicazione materiale***. Si definisce *condizionale o implicazione materiale* il connettivo logico che ad ogni coppia di proposizioni p e q associa la proposizione $p \to q$

falsa nel caso in cui p sia vera e q sia falsa, vera negli altri casi.

$p \to q$ si legge *"p implica q", oppure "se p, allora q*", o anche "*da p segue q*".

La proposizione p è l'*antecedente*, q la *conseguente*.

L'aggettivo *"materiale"* è dovuto al fatto che la definizione si distacca dall'uso abituale dei connettivi linguistici del parlare quotidiano, ma l'implicazione è legata alla materiale considerazione dei valori di verità delle proposizioni componenti.

Tabella di verità dell'implicazione materiale e dell'equivalente disgiunzione

p	q	p →	$\bar{p} \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Dall'enunciato condizionale p → q, derivano altre forme proposizionali semplici che contengono le proposizioni p e q: $q \to p$ (conversa); ~p → ~q (inversa); ~q → ~p (contrapposta).

Per esse vale la seguente tabella di verità

componenti		condizionale	conversa	inversa	contrapposta
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\bar{p} \to \bar{q}$	$\bar{q} \to \bar{p}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V

F	F	V	V	V	V

Dalla tabella si evince che un enunciato condizionale non è equivalente né alla sua inversa, né alla sua conversa, mentre è logicamente equivalente alla sua contrapposta

f) ***il bicondizionale o coimplicazione materiale*** è il connettivo logico che ad ogni coppia di proposizioni *p, q* associa la proposizione p ↔ *q*, vera se *p* e *q* hanno lo stesso valore di verità, falsa negli altri casi; si legge "*p se e solo se q*", o "*p implica doppiamente q*"

Tabella di verità del bicondizionale

p	q	q ↔ p
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

LEGGI di DE MORGAN

Prima legge di De Morgan

date due proposizioni p e q , la negazione della loro congiunzione è equivalente alla disgiunzione delle loro negazioni $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

Esempio. «È falso che le rose sono rosse e le violette sono blu», equivale secondo De Morgan, alla seguente proposizione: «Le rose non sono rosse o le violette non sono blu»

Seconda legge di De Morgan

date due proposizioni p e q , la negazione della loro disgiunzione è equivalente alla congiunzione delle loro negazioni : $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$.

Esempio. «Non è vero che Enrico mangia o beve», equivale secondo De Morgan, alla seguente proposizione: «Enrico non mangia e non beve»

LE TAUTOLOGIE

Una proposizione che, indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti, è sempre vera, prende il nome di *tautologia*.

Una *tautologia* costituisce, dunque, lo schema di un ragionamento valido.

Esempio. La proposizione p *aut* ~p è una tautologia perché è sempre vera qualunque sia il valore di verità di *p* (e di ~p). Essa può essere così interpretata *"è vero che una proposizione è vera oppure (aut) è falsa"*.

Ancora, *"parlo o non parlo", "piove o non piove",* sono tautologie (esprimono il principio del terzo escluso).

LE CONTRADDIZIONI

Una proposizione che è sempre falsa, indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti, prende il nome di *contraddizione o antilogia*.

Esempio. La proposizione $p \wedge \overline{p}$ è una *contraddizione* perché è sempre falsa qualunque sia il valore di verità di p e di $\overline{p}$.

LOGICA DEDUTTIVA o INFERENZA

È quel processo del pensiero (ragionamento) che, a partire da una proposizione H, costruisce la proposizione T, che è vera ogni qual volta che è vera H.
Tale schema si esprime con la scrittura: $H \Rightarrow T$, e si legge "H implica T", oppure "da H si deduce T". In altri termini, la *logica deduttiva* è un procedimento che porta a concludere.
Es. la proposizione *"tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo" inferisce* che *"Socrate è mortale"*

Regola di deduzione "*modus ponens*"

Date le proposizioni *p: "piove"*; *q: "io sono triste"*, consideriamo la proposizione composta $(p \rightarrow q) \wedge p$: "***se** piove **allora** io sono triste, **e** piove*" e, definiamone la tavola di verità

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Dall'esame della tavola si deduce immediatamente che se la premessa $p \rightarrow q$ è vera e anche p è vera, allora la proposizione q : *"io sono triste"* è vera.

In simboli, si ha il seguente schema $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$

oppure $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ che si può leggere *"poiché p è vera e $p \rightarrow q$ è vera, si deduce che q è vera"*.

Osservazione importante

La differenza tra l'implicazione materiale e la deduzione logica è sostanzialmente questa: la verità dell'implicazione $p \rightarrow q$ non garantisce né la verità di p né quella di q; mentre la verità di $p \rightarrow q$ e quella di p garantiscono la verità di q.

Nota. Il "*modus ponens*", nel latino scolastico medievale era inteso come "*metodo per aggiungere*" una proposizione vera all'insieme delle proposizioni già dimostrate.
Il "*modus ponens*" è il tipico procedimento che si applica per dimostrare un teorema, la cui ipotesi è p e la tesi è q. Si dice anche che: *"p è condizione sufficiente perché valga q"*, mentre *"q è condizione necessaria per il verificarsi di p"*. Infine, se è $p \Leftrightarrow q$, allora si dice che : *" p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q"*.

Regola di deduzione "*modus tollens*".

Date *p: "piove"*; *q :"le strade sono bagnate"*, consideriamo la proposizione composta $(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}$: "***se** piove **allora** le strade sono bagnate, **e** le strade non sono bagnate*" e definiamone la tavola di verità

p	$\overline{p}$	q	$\overline{q}$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}$
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V

Dall'esame della tavola si deduce immediatamente che se la premessa $p \rightarrow q$ è vera e anche $\overline{q}$ è vera (cioè q è falsa), allora la proposizione $\overline{p}$: *"non piove"* è vera, cioè p è falsa. In simboli, si ha lo schema

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \quad \overline{q} \end{array}}{\overline{p}}$$

oppure: $[(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$, che si legge *"poiché q è falsa e* $p \rightarrow q$ *è vera, si deduce che p è falsa".*

In conclusione: se è vera l'implicazione $p \rightarrow q$ ed è anche vera la negazione del conseguente q (cioè q è falsa), allora è vera anche $\overline{p}$, negazione dell'antecedente.

CONTROESEMPI

1) **controesempio del "*modus ponens*" ,** lo schema $$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \quad q \end{array}}{p}$$

non è corretto, come si può verificare con la relativa tabella e con l'esempio che segue. Date le proposizioni *p: "la benzina è finita"; q: "la macchina si ferma"* e consideriamo lo schema deduttivo *"se la benzina è finita allora la macchina si ferma, e la macchina si ferma, dunque la benzina è finita"*, tale ragionamento è evidentemente non corretto: infatti, la macchina può fermarsi anche se la benzina non è finita!

2) **controesempio del "*modus tollens*" ,** lo schema $$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{p} \end{array}}{\overline{q}}$$

non è corretto, infatti, riprendendo l'esempio precedente, si ha: *"se la benzina è finita allora la macchina si ferma, e la benzina non è finita"*, dunque *"la macchina non si ferma".*
Tale ragionamento è evidentemente non corretto: infatti, la macchina può fermarsi anche se la benzina non è finita!

SILLOGISMO

Esempio 1- Date le proposizioni

p: "c'è il sole"; q: "vado allo stadio"; r: "incontro Dario"

Se sono vere le seguenti premesse

$p \rightarrow q$: *"se c'è il sole, allora vado allo stadio"*
$q \rightarrow r$: *"se vado allo stadio, allora incontro Dario"*

si può dedurre la conclusione, certamente vera,

$p \rightarrow r$: *"se c'è il sole, allora incontro Dario"*

Esempio 2- Date le proposizioni

p: *"praticare uno sporte"*; *q*: *"mantenersi in forma"*; *r*: *"vivere a lungo"*.

Se sono vere le seguenti premesse

$p \to q$: *"se un uomo pratica uno sport, allora si mantiene in forma"*

$q \to r$: *"se un uomo si mantiene in forma , allora vive a lungo"*

si può dedurre la conclusione, certamente vera,

$p \to r$: *"se un uomo pratica uno sport, allora vive a lungo"*

Il ragionamento degli esempi proposti prende il nome di *sillogismo* e si può schematizzare nei due seguenti modi:

1)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

2)
$$\left[\left(p \to q\right) \wedge \left(q \to r\right)\right] \Rightarrow p \to r$$

In sintesi, il *sillogismo* è formato da 2 premesse, del tipo $p \to q$ *e* $q \to r$, aventi un elemento comune che collega le due premesse e permette di dedurre la conclusione $p \to r$,vera ogni volta che le premesse sono vere.

DIMOSTRAZIONE *per assurdo*

Supponiamo di dover dimostrare la proposizione *p*.

Il procedimento *per assurdo* consiste nel verificare che assumere come vera la *negazione* di *p* (cioè che *p* sia falso) conduce a una *contraddizione logica*.

Quindi, *p* non può essere falsa, e perciò, secondo la legge del terzo escluso, deve essere vera.

Tale procedimento è molto diffuso in matematica nelle dimostrazioni di teoremi nei quali la verità della tesi ammette come unica alternativa la sua falsità. Ad esempio, due rette di un piano o sono o non sono parallele, un numero reale è o non è un numero irrazionale, due segmenti sono o non sono commensurabili.

LOGICA DEI PREDICATI

Mentre la logica proposizionale s'interessa della correttezza formale del calcolo delle proposizioni mediante i connettivi vero-funzionali, la logica dei predicati prende in esame anche la struttura interna delle proposizioni. Si utilizzano frasi del tipo:

1) Esiste (almeno) un oggetto x che verifica la proprietà P

2) Per ogni oggetto y è verificata la proprietà Q

La formalizzazione della prima frase necessita di un *quantificatore esistenziale* che garantisca l'esistenza di almeno un oggetto tale da verificare una proprietà data;

la seconda, di un *quantificatore universale* che garantisca il rispetto della proprietà data da parte di tutti gli oggetti di una considerata totalità.

QUANTIFICATORI

∀ quantificatore universale «per ogni», «qualunque sia»
∃ quantificatore esistenziale «esiste almeno un»
∃! quantificatore esistenziale «esiste un solo»

Introduciamo tali simboli con le considerazioni seguenti:
il simbolo *x*(P) significa che esiste (almeno) una *x* che verifica la proprietà P;
il simbolo *x*(P) significa che per ogni *x* è verificata la proprietà P.
Detta S la proprietà "essere studente", si ha

- Universale affermativa x(S) *Tutti sono studenti*
- Universale negativa x**~(**S) *Tutti non sono studenti, nessuno è studente*
- Esistenziale (o particolare) affermativa x(S) *Qualcuno è studente*
- Esistenziale (o particolare) negativa x**~(**S) *Qualcuno non è studente*

Per i due quantificatori non vale la proprietà commutativa, x y non equivale x y

EQUIVALENZE CON LA NEGAZIONE

La negazione di una formula universale è una formula esistenziale e viceversa.

- x (S) ↔ ~ x ~(S)
- x ~(S) ↔ ~ x (S)
- ~ x (S) ↔ x ~(S)
- ~ x ~(S) ↔ x (S)

Esempio: Dire "*Non è vero che tutti i programmi TV sono inguardabili*" è lo stesso che dire "*C'è almeno un programma TV che non è inguardabile*".

-La negazione di una quantificazione esistenziale equivale all'affermazione di tutte le negazioni.

Esempio: Dire "*Non è vero che c'è almeno un tipo di sigarette che fa bene*" è lo stesso che dire "*Tutti i tipi di sigarette non fanno bene*" oppure, equivalentemente "*Nessun tipo di sigarette fa bene*".

Altri esempi

1- "*A nessun calciatore sono antipatici tutti gli arbitri*" è come dire che "*Ad ogni calciatore è simpatico almeno un arbitro*"

2- "*È falso che ogni domenica corro e vado a Messa*" equivale a dire che "*Qualche domenica non corro o non vado a Messa*".

3- "*Nessuno studente vuole studiare tutti i giorni della settimana*" equivale a dire che "*Scelto uno studente qualsiasi, c'è almeno un giorno della settimana in cui egli non vuole studiare*"

Osservazione

L'ordine dei quantificatori può essere arbitrariamente cambiato se tutti sono universali o tutti sono esistenziali, ma non lo può se alcuni sono universali e alcuni sono esistenziali.

Per i due quantificatori non vale la proprietà commutativa, x y non equivale a x y