**APPUNTI di LOGICA**
(a cura del prof. Francesco Auletta)

## PROPOSIZIONI LOGICHE

**Le proposizioni logiche** sono quelle proposizioni per le quali si può stabilire il valore di verità, cioè se sono vere o sono false, e per le quali sussistono i seguenti principi fondamentali:
***-principio di non contraddizione*****,** una proposizione logica non può essere vera e falsa contemporaneamente;
***-principio del terzo escluso*****,** una proposizione logica può assumere solo il valore di vero o falso e non esiste un terzo valore.

Non sono proposizioni logiche, in quanto per esse non si può esprimere un giudizio di verità o di falsità, le frasi del tipo
-frasi interrogative, come "hai *mangiato?"*,
-frasi esclamative come "*che bel dipinto!"*
-opinioni, come "*questo film è molto noioso*"
-previsione, come "*Claudio sarà promosso*"
-esortazione, come "*scrivi a tuo fratello*"
-prive di senso: "*il seno di un angolo vince a poker*"
-indefinite: "*leggere il giornale*"

Una proposizione logica può essere

-***semplice*** **(*atomica, elementare*),** «*Dario legge*», «*Mario gioca*»
***-composta*** **(*molecolare*),** «*Dario legge e Mario gioca*»

Le proposizioni semplici le indicheremo con le lettere *p*, *q*, *r*...
Le proposizioni composte, definite anche funzioni logiche, sono ottenute collegando tra loro due o più proposizioni semplici mediante particolari operatori logici, detti *connettivi* o *funtori*.

**CONNETTIVI LOGICI** **I connettivi logici principali sono:**

**a)** ***la negazione*****;**

**b)** ***la congiunzione*** o ***prodotto logico;***

**c)** ***la disgiunzione inclusiva*** o ***somma logica;***

***d) la disgiunzione esclusiva;***

***e) il condizionale o implicazione materiale;***

***f) il bicondizionale o coimplicazione materiale;***

| | CONNETTIVI | SIMBOLI | FUNZIONI LOGICHE |
|---|---|---|---|
| a) | negazione | non, not | $\overline{p}, \tilde{p}, \sim p, \neg p$ |
| b) | congiunzione<br>o prodotto logico | et, and | $p \wedge q, p \cdot q$ |
| c) | disgiunzione logica inclusiva<br>o somma logica | o, or, vel | $p \vee q$ |
| d) | disgiunzione logica esclusiva | aut | $\sim(p \leftrightarrow q), \veebar$ |
| e) | condizionale<br>o implicazione materiale | se…allora | $p \to q$ |
| f) | bicondizionale<br>o equivalenza materiale | se e solo se | $p \leftrightarrow q$ |

***a) la negazione*** di una proposizione è un connettivo unario (opera su una sola proposizione) che a ogni proposizione *p*, associa una nuova proposizione, detta negazione di *p*, la quale risulta vera se *p* è falsa, falsa se *p* è vera; in altri termini, con la negazione si scambiano i valori di verità di una proposizione.

La negazione di *p* viene indicata con *non p* oppure con il simbolo $\neg p$ , oppure ~p , oppure $\overline{p}$.

La negazione della negazione di *p* è una proposizione che è vera quando $\overline{p}$ è falsa ed è falsa quando $\overline{p}$ è vera. Essa si indica con il simbolo $\overline{\overline{p}}$.

Es. *p*: «*Leopardi è un poeta*» , $\overline{p}$: «*Leopardi non è un poeta*» ,

$\overline{\overline{p}}$ : «*non è che Leopardi non è un poeta*» = «*Leopardi è un poeta*»

**b)** ***la congiunzione logica*** o ***prodotto logico*** *di* due proposizioni è il connettivo che ad ogni coppia di proposizioni, *p, q,* associa la proposizione composta "*p* e *q*", vera se *p* e *q* sono entrambe vere, falsa negli altri casi. Si ottiene impiegando la particella « *e* » o il simbolo $\wedge$

**Tabella di verità della congiunzione o prodotto logico di *p* e *q***

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

**c)** la ***disgiunzione logica inclusiva*** o ***somma logica*** è il connettivo che ad ogni coppia di proposizioni *p*, *q*, associa la proposizione composta "*p* o *q*" (anche con "*p* oppure *q*", *oppure* "*p vel q*"), vera se almeno una delle due proposizioni è vera, falsa se *p* e *q* sono entrambe false. L'operazione viene indicata simbolicamente $p \vee q$.

**Tabella di verità della disgiunzione logica inclusiva** o **somma logica**

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**d)** ***la disgiunzione « o » può avere anche significato esclusivo*** ; in tal caso si usa la particella latina « *aut* » e il simbolo $\veebar$, oppure la doppia *« o »*
Pertanto, la frase «*Claudio legge aut cammina*» («*Claudio o legge o cammina*») è vera se è vera solo una delle due tra *legge* e *cammina*, è falsa in ogni altro caso.

**e)** ***il condizionale o implicazione materiale***. Si definisce *condizionale o implicazione materiale* il connettivo logico che ad ogni coppia di proposizioni $p$ e $q$ associa la proposizione $p \rightarrow q$

falsa nel caso in cui $p$ sia vera e $q$ sia falsa, vera negli altri casi.

$p \rightarrow q$ si legge *"p implica q", oppure "se p, allora q*", o anche "*da p segue q*".

La proposizione $p$ è l'*antecedente*, $q$ la *conseguente*.

L'aggettivo *"materiale"* è dovuto al fatto che la definizione si distacca dall'uso abituale dei connettivi linguistici del parlare quotidiano, ma l'implicazione è legata alla materiale considerazione dei valori di verità delle proposizioni componenti.

**Tabella di verità dell'implicazione materiale e dell'equivalente disgiunzione**

| p | q | p→ | $\bar{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

Dall'enunciato condizionale p → q, derivano altre forme proposizionali semplici che contengono le proposizioni *p* e *q*: $q \rightarrow p$ (conversa); ~p → ~q (inversa); ~q → ~p (contrapposta).

Per esse vale la seguente tabella di verità

| componenti | | condizionale | conversa | inversa | contrapposta |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ | $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ |
| V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | F |
| F | V | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | V |

Dalla tabella si evince che un enunciato condizionale non è equivalente né alla sua inversa, né alla sua conversa, mentre è logicamente equivalente alla sua contrapposta

**f)** ***il bicondizionale o coimplicazione materiale*** è il connettivo logico che ad ogni coppia di proposizioni *p, q* associa la proposizione p ↔ *q*, vera se *p* e *q* hanno lo stesso valore di verità, falsa negli altri casi; si legge "*p se e solo se q*", o "*p implica doppiamente q*"

**Tabella di verità del bicondizionale**

| p | q | q ↔ p |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

**LEGGI di DE MORGAN**

**Prima legge di De Morgan**

date due proposizioni $p$ e $q$ , la negazione della loro congiunzione è equivalente alla disgiunzione delle loro negazioni $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

**Esempio.** «È falso che le rose sono rosse e le violette sono blu», equivale secondo De Morgan, alla seguente proposizione: «Le rose non sono rosse o le violette non sono blu»

**Seconda legge di De Morgan**

date due proposizioni $p$ e $q$ , la negazione della loro disgiunzione è equivalente alla congiunzione delle loro negazioni : $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$.

**Esempio.** «Non è vero che Enrico mangia o beve», equivale secondo De Morgan, alla seguente proposizione: «Enrico non mangia e non beve»

**LE TAUTOLOGIE**

Una proposizione che, indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti, è sempre vera, prende il nome di *tautologia*.

Una *tautologia* costituisce, dunque, lo schema di un ragionamento valido.

Esempio. La proposizione p *aut* ~p è una tautologia perché è sempre vera qualunque sia il valore di verità di *p* (e di ~p). Essa può essere così interpretata *"è vero che una proposizione è vera oppure (aut) è falsa"*.

Ancora, *"parlo o non parlo"*, *"piove o non piove"*, sono tautologie (esprimono il principio del terzo escluso).

**LE CONTRADDIZIONI**

Una proposizione che è sempre falsa, indipendentemente dai valori di verità delle sue componenti, prende il nome di *contraddizione o antilogia*.

Esempio. La proposizione $p \wedge \overline{p}$ è una *contraddizione* perché è sempre falsa qualunque sia il valore di verità di $p$ e di $\overline{p}$ .

**LOGICA DEDUTTIVA o INFERENZA**

È quel processo del pensiero (ragionamento) che, a partire da una proposizione H, costruisce la proposizione T, che è vera ogni qual volta che è vera H.
Tale schema si esprime con la scrittura: H$\Rightarrow$T, e si legge "H implica T", oppure "da H si deduce T". In altri termini, la *logica deduttiva* è un procedimento che porta a concludere.
Es. la proposizione *"tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo" inferisce* che *"Socrate è mortale"*

**Regola di deduzione "*modus ponens*"**
Date le proposizioni *p: "piove"*; *q: "io sono triste"*, consideriamo la proposizione composta $(p\rightarrow q)\wedge p$ : "***se** piove **allora** io sono triste, **e** piove*" e, definiamone la tavola di verità

| $p$ | $q$ | $p\rightarrow q$ | $(p\rightarrow q)\wedge p$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | F |
| F | F | V | F |

Dall'esame della tavola si deduce immediatamente che se la premessa $p\rightarrow q$ è vera e anche $p$ è vera, allora la proposizione *q : "io sono triste"* è vera.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \qquad\quad q \end{array}$$

In simboli, si ha il seguente schema

oppure $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ che si può leggere *"poiché p è vera e p$\rightarrow$q è vera, si deduce che q è vera".*

**Osservazione importante**
La differenza tra l'implicazione materiale e la deduzione logica è sostanzialmente questa: la verità dell'implicazione $p\rightarrow q$ non garantisce né la verità di $p$ né quella di $q$; mentre la verità di $p\rightarrow q$ e quella di $p$ garantiscono la verità di $q$.
**Nota.** Il "*modus ponens*", nel latino scolastico medievale era inteso come "*metodo per aggiungere*" una proposizione vera all'insieme delle proposizioni già dimostrate.
Il "*modus ponens*" è il tipico procedimento che si applica per dimostrare un teorema, la cui ipotesi è $p$ e la tesi è $q$. Si dice anche che: *"p è condizione sufficiente perché valga q"*, mentre *"q è condizione necessaria per il verificarsi di p"*. Infine, se è $p\Leftrightarrow q$, allora si dice che : *" p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q"*.

**Regola di deduzione "*modus tollens*".**
Date *p: "piove"*; *q :"le strade sono bagnate"*, consideriamo la proposizione composta $(p\rightarrow q)\wedge \overline{q}$ : "***se** piove **allora** le strade sono bagnate, **e** le strade non sono bagnate*" e definiamone la tavola di verità

| $p$ | $\overline{p}$ | $q$ | $\overline{q}$ | $p\rightarrow q$ | $(p\rightarrow q)\wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | F | V | F | V | F |
| V | F | F | V | F | F |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | F | V | F |
| F | V | F | V | V | V |

Dall'esame della tavola si deduce immediatamente che se la premessa $p \to q$ è vera e anche $\overline{q}$ è vera (cioè q è falsa), allora la proposizione $\overline{p}$ : *"non piove"* è vera, cioè p è falsa. In simboli, si ha lo schema

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \quad\;\; \overline{q} \\ \hline \overline{p} \end{array}$$

oppure: $\left[ \left( p \to q \right) \wedge \overline{q} \right] \Rightarrow \overline{p}$ , che si legge *"poiché q è falsa e* $p \to q$ *è vera, si deduce che p è falsa".*

In conclusione: se è vera l'implicazione $p \to q$ ed è anche vera la negazione del conseguente $q$ (cioè $q$ è falsa), allora è vera anche $\overline{p}$ , negazione dell'antecedente.

**CONTROESEMPI**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \quad\;\; q \\ \hline p \end{array}$$

1) **controesempio del "*modus ponens*"** , lo schema

non è corretto, come si può verificare con la relativa tabella e con l'esempio che segue. Date le proposizioni *p: "la benzina è finita"*; *q: "la macchina si ferma"* e consideriamo lo schema deduttivo *"se la benzina è finita allora la macchina si ferma, e la macchina si ferma, dunque la benzina è finita"*, tale ragionamento è evidentemente non corretto: infatti, la macchina può fermarsi anche se la benzina non è finita!

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{p} \\ \hline \quad\;\; \overline{q} \end{array}$$

2) **controesempio del "*modus tollens*"** , lo schema

non è corretto, infatti, riprendendo l'esempio precedente, si ha: *"se la benzina è finita allora la macchina si ferma, e la benzina non è finita"*, dunque *"la macchina non si ferma"*.

Tale ragionamento è evidentemente non corretto: infatti, la macchina può fermarsi anche se la benzina non è finita!

**SILLOGISMO**

Esempio 1- Date le proposizioni

*p: "c'è il sole"*; *q: "vado allo stadio"*; *r: "incontro Dario"*

Se sono vere le seguenti premesse

$p \to q$ : *"se c'è il sole, allora vado allo stadio"*

$q \to r$ : *"se vado allo stadio, allora incontro Dario"*

si può dedurre la conclusione, certamente vera,

$p \to r$ : *"se c'è il sole, allora incontro Dario"*

Esempio 2- Date le proposizioni

*p: "praticare uno sporte"*; *q: "mantenersi in forma"*; *r: "vivere a lungo".*

Se sono vere le seguenti premesse

$p \to q$ : *"se un uomo pratica uno sport, allora si mantiene in forma"*

$q \rightarrow r$: *"se un uomo si mantiene in forma , allora vive a lungo"*
si può dedurre la conclusione, certamente vera,
$p \rightarrow r$: *"se un uomo pratica uno sport, allora vive a lungo"*
Il ragionamento degli esempi proposti prende il nome di *sillogismo* e si può schematizzare nei due seguenti modi:

1)
$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

2)
$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\right] \Rightarrow p \rightarrow r$$

In sintesi, il *sillogismo* è formato da 2 premesse, del tipo $p \rightarrow q$ *e* $q \rightarrow r$, aventi un elemento comune che collega le due premesse e permette di dedurre la conclusione $p \rightarrow r$,vera ogni volta che le premesse sono vere.

## DIMOSTRAZIONE *per assurdo*

Supponiamo di dover dimostrare la proposizione *p*.
Il procedimento *per assurdo* consiste nel verificare che assumere come vera la *negazione* di *p* (cioè che *p* sia falso) conduce a una *contraddizione logica*.
Quindi, *p* non può essere falsa, e perciò, secondo la legge del terzo escluso, deve essere vera.
Tale procedimento è molto diffuso in matematica nelle dimostrazioni di teoremi nei quali la verità della tesi ammette come unica alternativa la sua falsità. Ad esempio, due rette di un piano o sono o non sono parallele, un numero reale è o non è un numero irrazionale, due segmenti sono o non sono commensurabili.

## LOGICA DEI PREDICATI

Mentre la logica proposizionale s'interessa della correttezza formale del calcolo delle proposizioni mediante i connettivi vero-funzionali, la logica dei predicati prende in esame anche la struttura interna delle proposizioni. Si utilizzano frasi del tipo:

*1) Esiste (almeno) un oggetto x che verifica la proprietà P*

*2) Per ogni oggetto y è verificata la proprietà Q*

La formalizzazione della prima frase necessita di un *quantificatore esistenziale* che garantisca l'esistenza di almeno un oggetto tale da verificare una proprietà data;
la seconda, di un *quantificatore universale* che garantisca il rispetto della proprietà data da parte di tutti gli oggetti di una considerata totalità.

## QUANTIFICATORI

$\forall$ quantificatore universale «per ogni», «qualunque sia»
$\exists$ quantificatore esistenziale «esiste almeno un»
$\exists!$ quantificatore esistenziale «esiste un solo»

Introduciamo tali simboli con le considerazioni seguenti:
il simbolo  *x*(P) significa che esiste (almeno) una *x* che verifica la proprietà P;
il simbolo  *x*(P) significa che per ogni *x* è verificata la proprietà P.
Detta S la proprietà "essere studente", si ha

- Universale affermativa  x(S) *Tutti sono studenti*
- Universale negativa  x**~(**S) *Tutti non sono studenti, nessuno è studente*
- Esistenziale (o particolare) affermativa  x(S) *Qualcuno è studente*
- Esistenziale (o particolare) negativa  x**~(**S) *Qualcuno non è studente*

Per i due quantificatori non vale la proprietà commutativa,  x  y non equivale  x  y

**EQUIVALENZE CON LA NEGAZIONE**

La negazione di una formula universale è una formula esistenziale e viceversa.

- x (S) ↔ ~ x ~(S)
- x ~(S) ↔ ~ x (S)
- ~ x (S) ↔  x ~(S)
- ~ x ~(S) ↔  x (S)

Esempio: Dire "*Non è vero che tutti i programmi TV sono inguardabili*" è lo stesso che dire "*C'è almeno un programma TV che non è inguardabile*".

**-La negazione di una quantificazione esistenziale equivale all'affermazione di tutte le negazioni.**

Esempio: Dire "*Non è vero che c'è almeno un tipo di sigarette che fa bene*" è lo stesso che dire "*Tutti i tipi di sigarette non fanno bene*" oppure, equivalentemente "*Nessun tipo di sigarette fa bene*".

Altri esempi

1- "*A nessun calciatore sono antipatici tutti gli arbitri*" è come dire che "*Ad ogni calciatore è simpatico almeno un arbitro*"

2- "*È falso che ogni domenica corro e vado a Messa*" equivale a dire che "*Qualche domenica non corro o non vado a Messa*".

3- "*Nessuno studente vuole studiare tutti i giorni della settimana*" equivale a dire che "*Scelto uno studente qualsiasi, c'è almeno un giorno della settimana in cui egli non vuole studiare*"

**Osservazione**

**L'ordine dei quantificatori può essere arbitrariamente cambiato se tutti sono universali o tutti sono esistenziali, ma non lo può se alcuni sono universali e alcuni sono esistenziali.**

**Per i due quantificatori non vale la proprietà commutativa, x  y non equivale a  x y**