CORSO DI LOGICA

(Ing. Remigio Sciarra)

CALCOLO COMBINATORIO

Premessa

Il calcolo combinatorio studia i raggruppamenti che si possono ottenere con un dato numero di n oggetti disposti su un dato numero k di posti.

I raggruppamenti si possono formare senza ripetizioni o con ripetizioni degli oggetti.

CALCOLO COMBINATORIO

Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli n oggetti sono i 7 alunni, il numero k di posti sono le 5 sedie e non c’è ripetizione di oggetti poiché gli alunni sono tutti diversi.

Ancora, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi si possono collocare 10 palline di cui 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi, in 3 scatole, gli n oggetti sono le 10 palline, il numero k di posti sono le 3 scatole e c’è ripetizione di oggetti poiché di palline ce ne sono 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi.

PERMUTAZIONI

Sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è uguale al numero di posti e conta l'ordine con cui si dispongono.

Le permutazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Es. Permutazioni senza ripetizioni.

Quante parole (anche senza senso) si possono formare con la parola LIBRO?

$$n=5$$

$$K=5$$

Conta l'ordine!

PERMUTAZIONI

Si applica la formula delle
Permutazioni senza ripetizione di oggetti:

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

PERMUTAZIONI

Es. Permutazioni CON ripetizioni.

Quanti anagrammi possiamo ottenere con la parola MAMMA?

n=5

K=5

Conta l'ordine!

Ci sono lettere che si ripetono:

M si ripete 3 volte $r_1 = 3$

A si ripete 2 volte $r_2 = 2$

$$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

$$P_5^r = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

PERMUTAZIONI

Riassumendo:

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione $\boldsymbol{r}$ di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{P_n = n!}$	$\boldsymbol{P_n^r = \dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots r_k!}}$

ESERCIZI

13 ●●●

In quanti modi si può anagrammare (anche con parole senza significato) la parola PARCO?

A 119

B 25

C 125

D 200

E 24

Es. In quanti modi, lanciando consecutivamente per 6 volte una moneta, possono uscire 2 teste e 4 croci?

DISPOSIZIONI

Sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è DIVERSO dal numero di POSTI e conta l'ordine con cui si dispongono.
Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Es. Disposizioni senza ripetizioni.
In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?

$$n=5$$

$$K=3$$

Conta l'ordine!

DISPOSIZIONI

In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?	
$n = 5$	gli oggetti sono i 5 alunni
$k = 3$	i posti sono le 3 sedie
conta l'ordine	le sedie sono numerate, quindi conta l'ordine con cui gli alunni si siedono
senza ripetizione	i 5 alunni sono persone tutte distinte, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	si applica la formula delle disposizioni senza ripetizioni di oggetti
$D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$	ci sono 60 modi diversi in cui gli alunni si possono sedere

DISPOSIZIONI

Es. Disposizioni senza ripetizioni.

In quanti modi si possono accostare 7 palline in gruppi da 4?

n=7

K=4

Conta l'ordine!

$$D_{n,k} = ?$$

DISPOSIZIONI

Es. Disposizioni CON ripetizioni.

Utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare?

n=3

K=4

Conta l'ordine!

DISPOSIZIONI

Utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare?	
$n = 3$	gli oggetti sono le 3 cifre
$k = 4$	i posti sono le 4 cifre
conta l'ordine	le cifre hanno posizioni ben precise, quindi conta l'ordine con cui i numeri 1,2,3 si dispongono
$r = 4$	ciascuna cifra (1,2,3) può ripetersi fino a 4 volte per formare il numero a 4 cifre, quindi c'è ripetizione di oggetti
$D^r_{n,k} = n^k$	si applica la formula delle disposizioni con ripetizioni di oggetti
$D^r_{3,4} = 3^4 = 81$	si possono formare 81 numeri di 4 cifre usando le cifre 1, 2, 3

ESERCIZI

9

Determinare quante sono le parole di 7 lettere (anche senza senso) che si possono scrivere utilizzando solo le 4 lettere A, C, G, T (si intende che non bisogna necessariamente utilizzare tutte le 4 lettere, per cui per esempio anche la parola AGGTATA va bene).

A $7 \cdot 4$

B $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)/(4 \cdot 3 \cdot 2)$

C 7^4

D $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

E 4^7

(Test di ammissione a Medicina e Chirurgia, quesito 72, 2011)

ESERCIZI

8 Disponendo di 7 lettere dell'alfabeto, tutte diverse, il numero di parole con 4 lettere che si possono formare potendo ripetere 2 o 3 o 4 volte la stessa lettera è:

A 4^4

B 7^4

C 4^7

D 49

E 7^7

(Test di ammissione a Odontoiatria e Protesi dentaria, quesito 81, 1997)

DISPOSIZIONI

Riassumendo:

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione $\boldsymbol{r}$ di oggetti
Disposizioni • $n \neq k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ $\quad n > k$	$\boldsymbol{D^r_{n,k} = n^k}$

COMBINAZIONI

Sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e non conta l'ordine con cui si dispongono.
Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Es. Combinazioni senza ripetizioni.
Un negoziante vuole esporre in una piccola vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi.
In quanti modi si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?
NON Conta l'ordine!

COMBINAZIONI

Un negoziante vuole esporre in una piccola vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?	
$n = 10$	gli oggetti sono i 10 modelli di scarpe
$k = 4$	i posti sono le 4 paia di scarpe da esporre
non conta l'ordine	per l'esposizione non conta l'ordine
senza ripetizione	i modelli sono tutti distinti, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	si applica la formula delle combinazioni senza ripetizioni di oggetti
$C_{10,4} = \dfrac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$	ci sono 210 modi diversi per esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi

ESERCIZI

10 Tredici persone si stringono la mano. Ciascuna stringe la mano a tutte le altre. Quante sono le strette di mano in totale?

A 26

B 156

C 78

D 169

E 13

(Test di ammissione a Medicina e Chirurgia, quesito 78, 2009)

COMBINAZIONI

Es. Combinazioni CON ripetizioni.

Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco ed il secondo 5 gocce di colore nero.

Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?

NON Conta l'ordine!

$$n = 2$$

$$K = 5$$

COMBINAZIONI

Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco ed il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?

$n = 2$	gli oggetti sono i 2 colori
$k = 5$	i posti sono le 5 gocce che vanno prese di volta in volta
non conta l'ordine	per la composizione del nuovo colore non conta l'ordine
con ripetizione	per ogni colore si hanno a disposizione 5 gocce
$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$	si applica la formula delle combinazioni con ripetizioni di oggetti
$C^r_{2,5} = \frac{(2+5-1)!}{5! \cdot (2-1)!} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$	si possono formare solo 6 colori diversi: uno è il bianco (5 gocce bianche), uno è il nero (5 gocce nere) e poi ci sono 4 sfumature di grigio

Nelle combinazioni con ripetizione bisogna stare attenti ad individuare correttamente quali sono gli oggetti e quali sono i posti.

COMBINAZIONI

Riassumendo:

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione $\boldsymbol{r}$ di oggetti
Combinazioni • $n \neq k$ • $non\ conta\ l'ordine$	$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad n > k$$	$$C^{r}_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI, COMBINAZIONI

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • $conta\ l'ordine$	$P_n = n!$	$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • $conta\ l'ordine$	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ $n > k$	$D_{n,k}^r = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • $non\ conta\ l'ordine$	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $n > k$	$C_{n,k}^r = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI, COMBINAZIONI

5 Quanti sono i numeri naturali formati da tre cifre significative distinte?

A 648

B 504

C 720

D 120

E 630

(Test di ammissione a Medicina Veterinaria, quesito 77, 2006)

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI, COMBINAZIONI

7 Quanti sono i numeri di tre cifre (non necessariamente distinte) che si possono scrivere con le cifre 2, 3 e 5?

- A 6
- B 27
- C 15
- D 12
- E 9

(Test di ammissione a Medicina Veterinaria, quesito 77, 2008)

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI, COMBINAZIONI

12 **Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre dispari distinte?**

A 5

B 60

C 120

D 20

E 625

(Test di ammissione a Medicina e Chirurgia, quesito 76, 2006)

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI, COMBINAZIONI

10 Tredici persone si stringono la mano. Ciascuna stringe la mano a tutte le altre. Quante sono le strette di mano in totale?

A 26

B 156

C 78

D 169

E 13

(Test di ammissione a Medicina e Chirurgia, quesito 78, 2009)